3) Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante. En déduire quelle est convergente.

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

- $x \longmapsto \dfrac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $[0,1]$

par suite on

- $\dfrac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 0 \quad \forall x \in [0,1]$ ($x^n \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$)

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leqslant 0$

on a $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante